ЛА Маринов 20.11.12

Хомогенна система линейни уравнения (ХСЛУ)

Опр.

∀ базис на пространството на ХСЛУ наричаме фундаментална система от решения

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3=0 \\ -3x_1-8x_2-4x_3+13x_4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & -8 & -4 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

общ. $(-4x_3, x_3, x_3, 0)$

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_3-4x_5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$ ФСР с 3 вектора

полагаме

$x_2=p$, $x_3=q$, $x_5=r$ $\Rightarrow$

и $x_4=q-3r$

$x_1+2p+q+3q-3r+5r=0 \Rightarrow x_1=4r-2p-4q$

при $p=1, q=0, r=0 \Rightarrow a_1=(-2,1,0,0,0)$

при $p=0, q=1, r=0 \Rightarrow a_2=(-4,0,1,1,0)$

при $p=0, q=0, r=1 \Rightarrow a_3=(4,0,0,-3,1)$

$a_1\ a_2\ a_3$ образуват ФСР

Ранг

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$ минор

4.3) Да се намери рангът на сист. вектори a_1 — и максималната ЛНЗ подсистема

а) $a_1 = (2\ 1\ -3)$ $a_2 = (3\ 1\ 5)$ $a_3 = (1\ 0\ 4)$ $a_4 = (4\ 2\ -1)$ $a_5 = (1\ 0\ -2)$

Без значение местоположението на съответните вектори

$$\begin{matrix} a_3 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2' = a_2 - a_5 \\ a_4' = a_4 - 2a_3 \\ \\ a_5' = a_5 - a_1 \\ a_1' = a_1 - 2a_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2'' = a_2' - a_1' \\ a_5'' = a_5' \cdot (-1/9) \\ \\ a_4' = a_4 \cdot 4/5 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{matrix} a_3 \\ a_5'' \\ a_1' \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_3\ a_5''\ a_1'$ са ЛНЗ и образуват max ЛНЗ П система

Рангът е 3

б) $a_1 = (0\ 6\ 6\ 1\ 0)$ $a_2 = (3\ 1\ 1\ 0\ 0)$ $a_3 = (1\ -1\ 3\ 1\ -2)$ $a_4 = (-2\ 3\ 1\ 0\ 1)$ $a_5 = (2\ 3\ 5\ 1\ -1)$

$a_6 = (1\ -6\ 4\ 2\ -5)$

$$\begin{matrix} a_3 \\ a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_6' = a_6 - a_3 \\ a_5' = a_5 - 2a_3 \\ \\ a_4' = a_4 + a_5 \\ a_2' = a_2 - 3a_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow + 5 \cdot 1/2 \begin{pmatrix} a_3 \\ a_6 \\ a_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 18 \end{pmatrix}$$

$r(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) = 3$

$a_2\ a_3\ a_6$ образуват max ЛНЗ подсистема

$r = ?$

4,4 а)
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ \cancel{0\ 5\ -4\ -3} & & & \\ \cancel{0\ 15\ -12\ -9} & & & \end{pmatrix} \to r = 2$$
$r_4(A) = 2$
$r(A) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -2-i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 4$$

$r = ?$ в зависимост от λ

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +2 \end{matrix}$$

∇ при $\lambda = 0 \Rightarrow r(A) = 3$

$\nabla\!\!\!/$ при $\lambda \neq 0 \Rightarrow r(A) = 4$

Да се намери хомог. сист. простр-во от решения на която принадлежат

б) $a_1 = (2\ 1\ -1\ 3)$ $a_2 = (3\ 1\ 2\ 1)$ $a_3 = (1\ 1\ -4\ 5)$

1) намираме max ЛНЗ подсист

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -7 \\ \cancel{0\ -2\ 14\ -14} & & & \end{pmatrix} \quad r = 2$$

2/ образуване хомог. система от уравнения

$$U = \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

3) ФСР на системата (полагане)

$x_3 = p$, $x_4 = q$, $x_2 = 7p - 7q$, $x_1 = 2q - 3p$

при $p = 0$ $q = 1$ — $a_1(2, -7, 0, 1)$

при $p = 1$ $q = 0$ — $a_2(-3, 7, 1, 0)$

4) $W = \begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

$a_1 = (11-22)$ $a_2 = (213-2)$ $a_3 = (3456)$ $a_4 = (3691 2)$

$$\begin{pmatrix} 11-22 \\ 213-2 \\ 3456 \\ 3691 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11-22 \\ 0-17 6 \\ 0 1 11 0 \\ 024 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11-22 \\ 0-11-6 \\ 003-1 \\ 009-3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 3$$

$$U = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

полагане

$x_3 = p$, $x_4 = 3p$, $x_1 = 7p$, $x_2 = -11p$

$b_1(\underset{x_1}{7}\ \underset{x_2}{-11}\ \underset{x_3}{3}\ \underset{x_4}{3})$

$W: \quad 7x_1 - 11x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$

Суми и сечения

$a_1 - a_k$, $b_1 - b_e$

Сума $\ell(a_1 - a_k) + \ell(b_1 - b_e) = \ell(a_1 - a_k, b_1 - b_e)$

Нека U и W са ПП на F^n като U е зададено като линейна обвивка на система от вектори а W пространство от решения на ХСЛУ ? U+W и U∩W и базис към всяко

а) $U = \ell(a_1 a_2)$ $a_1 = (1122)$ $a_2 = (1\,1\,2\,-2)$

$$W = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{vmatrix}$$

Реш

Намираме ФСР на W

Сещаме първото от второто

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ полагаме $x_3 = p$, $x_2 = q$

$x_1 = -q$, $x_4 = -p$

при $p = 1$ $q = 0$ $b_1 = (001-1)$

при $p = 0$ $q = 1$ $b_2 = (-1100)$

$U = \ell(b_1 b_2)$

$U + W = \ell(a_1 a_2 b_1 b_2)$

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ базис $c_1 = (001-1)$, $c_2 = (-1100)$, $c_3 = (0222)$

Термин ЛНЗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

полагаем

$x_4 = p \qquad x_3 = -q \Rightarrow x_2 = -2p, \quad x_1 = -2q$

при $p = 1 \quad q = 0$

$d_1 = (0 \; -2 \; 0 \; 1)$

при $p = 0 \quad q = 1$

$d_2 = (-2 \; 0 \; 1 \; 0)$

$$U: \left| \begin{array}{l} -2x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$W \cap U: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

полагаем

$x_2 = p \qquad x_4 = 2p$

$x_3 = -2p \qquad x_1 = -p$

ФСР $e_1 = (-1 \; 1 \; -2 \; 2)$

$U = L(a_1, a_2, a_3)$

$a_1 (1 \; 2 \; 1 \; 2) \quad a_2 = (2 \; 1 \; 2 \; 1) \quad a_3 = (1 \; 2 \; 3 \; 4)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

найти ФСР

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{полагаме } x_2=p$$
$$x_3=q \Rightarrow x_1=-q,\ x_4=-p$$

$$W=e(b_1b_2)$$
при $p=1\ q=0 \Rightarrow b_1=(0\,1\,0\,-1)$
при $p=0\ q=1 \Rightarrow b_2=(-1\,0\,1\,0)$

$$U+W=e(a_1a_2a_3b_1b_2)$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&1&4&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$c_1=(0\,1\,0\,-1)$$
$$c_2=(-1\,0\,1\,0)$$
$$c_3=(0\,0\,1\,0)$$
$$c_4=(0\,0\,0\,1)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&2&3&4\\2&1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\\x_3+x_4=0\\x_2+x_4=0\end{cases}$$

$x_4=p \Rightarrow x_2=-p,\ x_3=-p,\ x_1=p$

$$d_1=(1\,-1\,-1\,1)\Rightarrow$$
$$U: x_1-x_2-x_3+x_4=0$$
$$W\cap U:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{полагаме } x_3=p\Rightarrow$$
$$x_4=p,\ x_1=-p,\ x_2=-p$$
$$e_1=(-1\,-1\,1\,1)\quad \text{ФСР}$$

(2) не базис на $W\cap U$